

DM de mathématiques n°4

Modèles de croissance de population

à rendre pour le lundi 24 novembre

On s'intéresse dans ce DM à la modélisation d'une croissance démographique d'une population (animale, végétale, cellulaire, humaine...). On notera $y(t)$ la population totale à un instant t . A priori $y(t)$ est donc un nombre entier qui ne varie qu'aux instants où une naissance ou une mort a lieu. Toutefois, si on se place sur une échelle de temps assez grande et qu'on considère que la valeur de $y(t)$ donne (par exemple) le nombre de millions d'individus, on peut considérer que $y(t)$ est un réel, et que y est une fonction réelle.

1 Le modèle de Malthus

Un premier modèle est donné par l'équation $y' = by - dy$ avec $b > 0$ le taux de naissance (par unité de temps) et $d > 0$ le taux de mort. Afin de réduire le nombre de paramètres, on pose $r = b - d$ qui est le taux de natalité ou taux de croissance. On rajoute également une condition initiale :

$$\begin{cases} y' = ry \\ y(0) = y_0 \end{cases} \quad \text{avec } y_0 > 0 \text{ un réel donné}$$

- 1) Justifier qu'il existe une unique solution à ce problème. Déterminer la solution, qu'on notera encore y .
Puisqu'il y a existence et unicité de la solution, on pourra poser une fonction y et vérifier qu'elle est solution en l'injectant dans le problème.
- 2) On suppose $b < d$, donc $r < 0$. Que vaut $y(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$? Interpréter.
- 3) Même question lorsque $b > d$.

Pour la petite histoire : ce premier modèle de population a été mis au point par l'économiste britannique Malthus. Il avait appliqué ce modèle à la population humaine et a conclu qu'elle allait croître de façon exponentielle, tandis que les ressources alimentaires n'augmentent qu'arithmétiquement. Cependant, son analyse a suscité moult débats, et a conduit plus tard à l'élaboration de modèles plus réalistes.

2 Le modèle de Verhulst

Le modèle de Malthus repose sur l'hypothèse que le taux de natalité r restera constant au cours du temps. En réalité, lorsque la population devient trop importante et que les ressources de l'environnement viennent à manquer, le taux de mort sera plus élevé à cause d'un effet de compétition pour la survie. Le modèle de Verhulst corrige cela en considérant un nouveau taux de natalité $\tilde{r}$ qui dépend de y , donnée par : $\tilde{r}(y) = r \times \left(1 - \frac{y}{K}\right)$ avec $K > 0$ une constante donnée. On obtient de facto le modèle suivant :

$$\begin{cases} y' = ry \left(1 - \frac{y}{K}\right) \\ y(0) = y_0 \end{cases} \quad \text{avec } y_0 \in]0, K[\text{ un réel donné} \quad (\text{V})$$

La valeur de K représente la "capacité" de l'environnement, c'est-à-dire la quantité de ressources renouvelables que peut prodiguer l'environnement pour la survie de l'espèce. Lorsque $y(t) > K$, on a $\tilde{r}(y) < 0$ et la population diminue. Inversement, lorsque $y(t) < K$, on a $\tilde{r}(y) > 0$ de sorte que la population augmente. On admet que le problème (V) admet une unique solution qu'on notera y dans la suite. De plus, grâce à l'hypothèse $y_0 \in]0, K[$, on admet que pour tout temps $t \geq 0$, on a $y(t) \in]0, K[$.

Pour résoudre (V), on utilise la séparation de variables : pour tout temps $t \geq 0$ et tout temps intermédiaire $s \in [0, t]$, on a

$$\frac{y'(s)}{ry(s) \left(1 - \frac{y(s)}{K}\right)} = 1 \quad \text{donc} \quad \int_0^t \frac{y'(s)}{ry(s) \left(1 - \frac{y(s)}{K}\right)} ds = \int_0^t 1 ds$$

4) Montrer que $\int_0^t \frac{y'(s)}{ry(s) \left(1 - \frac{y(s)}{K}\right)} ds = \frac{1}{r} \ln \left(\frac{y(t)}{K - y(t)} \right) - \frac{1}{r} \ln \left(\frac{y_0}{K - y_0} \right)$. On pourra faire un changement de variables.

5) En déduire que $y(t) = K \left(1 - \frac{1}{1 + C e^{rt}} \right)$ avec $C = \frac{y_0}{K - y_0} > 0$.

6) Quelle est la limite de $y(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$? Interpréter.

3 Le modèle de Richards (facultatif)

Ophélie est une biologiste : elle aimerait appliquer le modèle de Verhulst pour modéliser la vitesse de croissance d'une plante. Mais elle constate que le taux de croissance $\tilde{r}(y) = r \times \left(1 - \frac{y}{K}\right)$ de l'équation de Verhulst ne permet pas de "coller" aux données qu'elle a pu recueillir. Ophélie propose le modèle suivant :

$$\begin{cases} y' = ry \left(1 - \left(\frac{y}{K}\right)^\alpha\right) \\ y(0) = y_0 \end{cases} \quad \text{avec } y_0 \in]0, K[\text{ et } \alpha > 0 \text{ des réels donnés} \quad (\text{R})$$

Le réel α est une constante qui dépend de l'espèce de la plante considérée. Ophélie est contente de son modèle, mais ne sait pas trop comment résoudre le problème (R). Elle toque à la porte des MPSI en demandant de l'aide... À vous de la lui donner !

Pour simplifier, on prendra $r = K = 1$ dans la suite. On résout donc : $\begin{cases} y' = y(1 - y^\alpha) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$ Là encore, on admet qu'il y a existence et unicité d'une solution y définie sur $\mathbb{R}_+$ et à valeurs dans $]0, K[$, i.e. $]0, 1[$.

7) On décide de faire un changement de fonction inconnue en posant $z = y^\alpha$. Montrer que y est solution de (R) si et seulement si z est solution d'un problème de la forme :

$$\begin{cases} z' = \text{Cste} \times z(1 - z) \\ z(0) = y_0^\alpha \end{cases}$$

avec Cste une constante strictement positive qu'on déterminera en fonction de α .

8) En déduire $z(t)$ pour tout réel $t > 0$.

9) En déduire finalement que $y(t) = \left(1 - \frac{1}{1 + D e^{\alpha r t}}\right)^{1/\alpha}$ avec $D = \frac{y_0^\alpha}{1 - y_0^\alpha} > 0$.

Un peu de concret ! Vous pouvez consulter les graphes des solutions des problèmes (V) et (R) grâce au lien suivant : <https://www.desmos.com/calculator/hdhs8mcr1?lang=fr>.

10) Observer le rôle de α sur le graphe de la solution de (R). Donner une interprétation en lien avec le rôle de α pour la fonction $\tilde{r}(y) = r \times \left(1 - \frac{y^\alpha}{K^\alpha}\right)$, que l'on peut visualiser avec le lien suivant :

<https://www.desmos.com/calculator/gapox64nx5?lang=fr>